

2021-2022 GÜZ DÖNEMİ SAYILAR TEORİSİ I ARA SINAV SORULARI

1) a) p asal tam sayı m, n, r pozitif tam sayılar olsun. $p^r | mn$ ve p bölmez m ise $p^r | n$ olduğunu gösteriniz.

b) x ve y sıfırdan farklı tam sayılar z keyfi bir tam sayı olsun. $(x, y) = (x, y + xz)$ olduğunu gösteriniz.

2) a) $29x + 33y = 2490$ diophant denkleminin genel çözümünü bulunuz.

b) $4x + 3y - 6z = 8$ diophant denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3) $f(x) = x^3 + 19x^2 - x + 23 \equiv 0 \pmod{49}$ kongrüansının çözümü varsa bütün çözümlerini bulunuz.

4) a) x pozitif tam sayı olsun. $x^6 + 6^x$ sayısının 7 ile bölümünden elde edilen farklı kalanların toplamını bulunuz.

b) $\left(\left(\left(3^{35} \right)^{35} \right)^{35} \right)^{35}$

sayısının birler basamağındaki rakam hangi değerleri

alabilir?

BAŞARILAR
Prof. Dr. Şenol EREN

Δ a) $p^r | mn, p \nmid m \Rightarrow$

$(p | m) = 1 \Rightarrow (p^r, m) = 1 \Rightarrow p^r x + m y = 1, \exists x, y \in \mathbb{Z}$

$n p^r x + m n y = n \Rightarrow p^r | n$ bulunur.

b) $(x, y) = d \wedge (x, y + xz) = t$ olsun,

$(x, y) = d \Rightarrow d | x \wedge d | y \Rightarrow d | y + xz \Rightarrow d | t$

$(x, y + xz) = t \Rightarrow t | x \wedge t | y + xz \Rightarrow t | y \Rightarrow t | d$

$\Rightarrow t = d$ bulunur.

$$2 \text{ a) } x = 8.2490 + 33t$$

$$y = -7.2490 - 29t \quad \text{bulunur.}$$

$$b) (4, 3, -6) = 1 = d \quad (3, -6) = 3 = d_1$$

$$p = \frac{6}{3} = 2 \quad s = \frac{3}{3} = 1 \quad 3\alpha - 6\gamma = 3$$

$$\alpha = 3 \quad \gamma = 1$$

$$y = 3t + 2u \quad z = t + u$$

$$4x + 3t = 8 \quad x = 8 + 3u \quad t = -8 - 4u$$

$$y = -24 - 12u + 2u$$

$$z = -8 - 4u + u$$

$u, u \in \mathbb{Z}$ bulunur.

$$3- \quad f(x) = x^3 + 19x^2 - x + 23 \equiv 0 \pmod{49}$$

$$x^3 + 19x^2 - x + 23 \equiv 0 \pmod{7} \quad p = p^d = 7$$

$$b_1 = 1 \quad b_2 = 2 \quad b_3 = 6$$

$$f'(x) = 3x^2 + 38x - 1$$

$$f(1) = 42 \quad f'(1) = 40 \quad f(2) = 105 \quad f'(2) = 87$$

$$f(6) = 917 \quad f'(6) = 335$$

$$b = 2 \text{ için bulalım. } 87k \equiv -\frac{105}{7} \pmod{7}$$

$$3k \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow k \equiv -5 \pmod{7} \Rightarrow k \equiv 2 \pmod{7}$$

$$x = 2 + 2 \cdot 7 = \underline{\underline{16}} \pmod{49}$$

4-a)

$$x=1 \Rightarrow 1+6=7 \rightarrow \text{kaldır } 0$$

$$x=2 \Rightarrow 2^6+6^2=1+1=2$$

$$\varphi(7)=6 \text{ olup}$$
$$7 \text{ için } a^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$x=3 \Rightarrow 3^6+6^3=1+1=2$$

$$x=4 \Rightarrow 4^6+6^4=1+1=2$$

$$x=5 \Rightarrow 5^6+6^5=1-1=0$$

$$x=6 \Rightarrow 6^6+6^6=1+1=2$$

$$x=7 \Rightarrow 7^6+6^7=0+6=6$$

$$\underline{\text{toplam} = 9}$$

$$x=14 \quad 14^6+6^{14}=0+1=1$$

b) önce $3^{35} \equiv x \pmod{10}$ bakalım
 $(3,10)=1 \quad \varphi(10)=4$

$$3^4 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow (3^4)^8 \cdot 3^3 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$3^{35} \equiv 7 \pmod{10} \quad (7^4)^8 \cdot 7^3 \equiv 3 \pmod{10}$$

o halde ya 3 ya da 7 olabilir.